Espaces préhilbertiens

0.1. Mines (*)

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer l'existence et l'unicité d'un $A \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], P(0) = \int_0^1 A(t)P(t)\ dt$$

2) Montrer que A est de degré n.

Correction

1) On sait que sur l'espace $\mathbb{R}_n[X]$, la forme bilinéaire donnée par

$$(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\ dt$$

définit un produit scalaire. Or, l'application

$$\Phi : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R} \\ P \mapsto P(0) \end{array} \right.$$

est une forme linéaire. Par conséquent, d'après le théorème de Riesz, il existe un unique polynôme $A \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X], \Phi(P) = (A|P)$. Cela répond à la question.

2)On raisonne par l'absurde à cette question. Supposons que A ne soit pas de degré maximal n. Alors, A est de degré au plus $n-1$ donc le polynôme $Q = AX$ est toujours dans $\mathbb{R}_n[X]$. Mais alors :

$$Q(0) = 0 = (A|Q) = \int_0^1 tA^2(t)\ dt$$

Or, $t \mapsto tA^2(t)$ est continue et positive sur le segment $[0,1]$. Son intégrale étant nulle, on en déduit qu'elle est nulle sur $[0,1]$ donc $A = 0$ sur $]0,1]$, puis sur $[0,1]$ par continuité.

Remark 0.1. — — Le fait que l'on considère le polynôme AX ne sort pas du chapeau : cela utilise de façon cruciale le fait que la forme linéaire considérée est l'évaluation des polynômes en 0 (et que par conséquent, le polynôme AX évalué en 0 donne 0).

— Attention à la subtilité à la fin : en appliquant le théorème classique sur les fonctions positives continues d'intégrale nulle, on peut conclure que A est nul sur $]0, 1]$, **ouvert en** 0. Seul un argument de continuité permet de conclure que A est nul aussi en 0.

Remark 0.2 (Le théorème de représentation de Riesz). — On se place dans un espace euclidien de dimension fini E, dont on note $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire. Le théorème de Riesz énonce que toute forme linéaire $\Phi : E \to \mathbb{R}$ peut se représenter de manière unique par le produit scalaire, i.e. il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad \Phi(x) = (a|x)$$

Les exercices demandant de démontrer l'existence et l'unicité de certains vecteurs représentant une forme linéaire requièrent pour la plupart d'utiliser le théorème de Riesz, sous condition de trouver le bon produit scalaire à introduire !

0.2. La matrice de Gram - Mines (**)

Soit E un espace euclidien dont on note $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire. Pour toute famille de vecteur $x_1, ..., x_p$ de E, on introduit la matrice suivante, dite matrice de Gram :

$$G(x_1, ..., x_p) = ((x_i|x_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

1) Soit $\mathcal{B} = (o_1, ..., o_n)$ une base orthonormale de E et H la matrice de la famille $(x_1, ..., x_p)$ dans la base $\mathcal{B}$. Quelle est la dimension de la matrice H ? Montrer que ${}^tH \times H = G(x_1, ..., x_p)$, puis que $\mathrm{rg}(x_1, ..., x_p) = \mathrm{rg}(G(x_1, ..., x_p))$.
2) Soit $F = \mathrm{Vect}(x_1, ..., x_p)$ et $d(x, F)$ la distance de $x \in E$ au sous-espace F. Montrer que :

$$\forall x \in E, \quad \det(G(x, x_1, ..., x_p)) = d^2(x, F) \times \det(G(x_1, ..., x_p))$$

Correction

1) Il est immédiat que $H \in \mathcal{M}_{n,p}$. La matrice H est en fait la matrice des $(h_{i,}) = ((x_j|o_i))_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p}$. Notons $(m_{i,j}) = {}^tH \times H$. Alors :

$$m_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} h_{k,i} h_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} (x_i|o_k)(x_j|o_k)$$

Mais remarquons que pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n, x = \sum_{k=1}^{n}(x|o_k)o_k$. Donc :

$$m_{i,j} = \left(x_i | \sum_{k=1}^{n}(x_j|o_k)o_k\right) = (x_i|x_j)$$

Pour montrer que le rang de la famille $(x_1, ..., x_p)$ (c'est-à-dire le rang de H) est égal au rang de $G = {}^tH \times H$, il suffit de montrer par le théorème du rang que $\ker {}^tH \times H = \ker H$. L'inclusion "droite-gauche" est évidente. Dans l'autre sens, il suffit de remarque que si ${}^tH \times Hx = 0$, alors :

$$(x|{}^tH \times Hx) = 0 = (Hx|Hx) = ||Hx||^2$$

Autrement dit $Hx = 0$, c'est-à-dire $x \in \ker H$.

Remark 0.3 (Le théorème du rang). — Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension respective p et n et $f : E \to F$ une application linéaire. Le théorème du rang stipule que :

$$\mathrm{rg}(f) + \dim(\ker f) = \dim(E) = p$$

Il faut bien se rappeler que la somme des dimensions des espaces est égale à la dimension de l'espace de **départ**. En effet, elle ne peut clairement pas être égale à la dimension de l'espace d'arrivée : si $n > p$ par exemple, il est clair qu'au mieux $\mathrm{rg}(f) = p < n$ (c'est le cas où le noyau de f est réduit au vecteur nul).

2) Les calculs de déterminant sont toujours très fastidieux. Ici, l'idée est d'opérer sur les colonnes et de faire un développement par rapport à la première colonne pour obtenir le résultat. Le vecteur clé qu'il faut faire apparaître est le projeté du vecteur x sur le sous-espace F. Nous le notons $p(x) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i$. Par conséquent, si l'on note la matrice en colonne $(C\ C_1\ ...\ C_p)$, la somme qui va nous intéresser est :

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i C_i = \begin{pmatrix} (x|\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i) \\ (x_1|\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i) \\ \vdots \\ (x_p|\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x|p(x)) \\ (x_1|p(x)) \\ \vdots \\ (x_p|p(x)) \end{pmatrix}$$

Et on fait alors l'opération :

$$C \leftarrow C - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i C_i$$

Il vient alors que :

$$\det G(x, x_1, ..., x_p) = \begin{vmatrix} (x|x-p(x)) & (x|x_1) & \cdots & (x|x_p) \\ (x_1|x-p(x)) & (x_1|x_1) & \cdots & (x_1|x_p) \\ \vdots & & \ddots & \\ (x_p|x-p(x)) & & & (x_p|x_p) \end{vmatrix}$$

Mais, par définition du projeté : $p(x) \in F$ et $x - p(x) \in F^\perp$. Cela signifie que pour tout vecteur $f \in F, (f|x - p(x)) = 0$. En particulier, en prenant $f = x_i$, il vient que $(x_i|x - p(x)) = 0, \forall 1 \leqslant i \leqslant p$. Ainsi, il n'y a que des 0 dans la première colonne, excepté le premier terme $(x|x - p(x))$. Mais on sait également que $p(x) \perp (x - p(x))$ donc $(p(x)|x - p(x)) = 0$. Autrement dit :

$$d^2(x, F) = ||x - p(x)||^2 = (x - p(x)|x - p(x)) = (x|x - p(x))$$

Il ne reste plus qu'à développer par rapport à la première colonne pour obtenir le résultat.

Remark 0.4. — Introduire le projeté orthogonal $p(x)$ de x sur F est ici fondamental. Il faut bien se rappeler de toutes ses propriétés (un simple dessin suffit à les retrouver) :

— $p(x) \in F, x - p(x) \in F^\perp$
— Théorème de Pythagore : $||x||^2 = ||x - p(x)||^2 + ||p(x)||^2$
— $d^2(x, F) = ||x - p(x)||^2 = (x|x - p(x))$

0.3. Etude des matrices antisymétriques - X (**)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On fixe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, Ax et x sont orthogonaux si et seulement si A est antisymétrique.

Dorénavant, on suppose que A est une matrice antisymétrique.
2) On suppose A inversible. Montrer que nécessairement n est pair.
3) Montrer que A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs donc les blocs diagonaux sont de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix},$$

$a \in \mathbb{R}$, ou (0).
4) Que dire de la matrice A^2 ? Donner une autre preuve du résultat précédent.

Correction

1) On suppose A antisymétrique, i.e. $A + {}^tA = 0$. Donc pour $x \in \mathbb{R}^n$:

$$(Ax|x) = (x|{}^tAx) = (x| - Ax) = -(Ax|x) \Rightarrow (Ax|x) = 0$$

Réciproquement, si $(Ax|x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, alors pour tout couple $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}(A(x+y)|(x+y)) = 0 \\ &= (Ax|x) + (Ay|y) + (Ax|y) + (Ay|x) \\ &= (Ax|y) + (Ay|x) \\ &= (Ax|y) + ({}^tAx|y) \\ &= ((A + {}^tA)x|y)\end{aligned}$$

D'où : $A + {}^tA = 0$.

Remark 0.5. — C'est toujours la même astuce pour les matrices antisymétriques : il faut penser à considérer des vecteurs de la forme $(x+y), x, y \in E$.

2) Dans ce cas, on a :

$$\det A = \det {}^tA = \det(-A) = (-1)^n \det A$$

Par hypothèse, $\det A \neq 0$ puisque A est inversible, donc $(-1)^n = 1$ et n est pair.

Remark 0.6. — Cette question peut être très difficile si on ne connaît pas cette astuce. On utilise deux résultats qu'il faut toujours avoir à l'esprit :

$$\det M = \det {}^tM, \qquad \det \lambda M = \lambda^n \det M$$

3) Cette question est relativement difficile sans aide. L'idée est d'établir ce résultat par récurrence **double** sur la dimension n.

Initialisation : Le cas $n = 1$ est immédiat puisque la seule matrice antisymétrique de dimension 1 est la matrice nulle. Le cas $n = 2$ est aussi trivial puisque toutes les matrices antisymétriques de dimension 2 sont précisément de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

Hérédité : On suppose donc que toute matrice antisymétrique de dimension $n-1$ ou $n-2$ est orthogonalement semblable à une matrice de la forme du dessus. Donnons-nous une matrice antisymétrique A de taille n. L'idée fondamentale est "d'éclater" l'espace $\mathbb{R}^n$ en deux sous-espaces plus petits, invariants par A (donc sur lesquels A induit un endomorphisme), et sur lesquels on pourra appliquer notre hypothèse de récurrence. Autrement dit, il faut pouvoir écrire

$$\mathbb{R}^n = E \oplus F,$$

avec E de dimension supérieure ou égale à $n-2$ (donc F de dimension inférieure ou égale à 2), tels que E et F soient tous les deux stables par A. La question qu'il faut donc se poser est : comment obtenir une telle décomposition ?

On sait, d'après un exercice traité dans la Classe Interactive 5 que la matrice A laisse invariant soit une droite, soit un plan vectoriel, que nous notons E.

Remark 0.7. — On rappelle que la démonstration se fait en passant par le polynôme caractéristique. On le factorise sur $\mathbb{C}$: il admet nécessairement au moins une racine λ par le théorème de d'Alembert-Gauss. Si cette racine est réelle, cela veut dire que λ est valeur propre de A et on peut lui trouver un vecteur propre $x_\lambda \neq 0$ associé. Dans ce cas, la droite $\mathrm{Vect}(x_\lambda)$ est stable par A. Sinon, si λ est complexe, il faut considérer un vecteur propre $x_\lambda \neq 0$ **complexe** associé à λ, puis projeter l'égalité $Ax_\lambda = \lambda x_\lambda$ sur les parties réelles et imaginaires. On obtient l'existence d'un plan stable.

On sait que E est stable par A donc son supplémentaire $E^\perp$ est stable par ${}^tA = -A$, autrement dit $E^\perp$ est stable par A. Nous avons donc notre décomposition !

$$\mathbb{R}^n = E \oplus E^\perp$$

Notons f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice A dans la base canonique. On peut donc considérer les endomorphismes $f_{|E}, f_{|E^\perp}$ induits par l'endomorphisme f sur les espaces stables E et $E^\perp$. Mais E est de dimension 1 ou 2, donc $E^\perp$ est de dimension $n-1$ ou $n-2$. Donc, en utilisant l'hypothèse de récurrence sur $f_{|E^\perp}$ et l'initialisation $f_{|E}$, on sait que l'on peut trouver une base **orthonormale** $\mathcal{B}_E$ de E et $\mathcal{B}_{E^\perp}$ de $E^\perp$ dans laquelle $f_{|E}$ et $f_{[E^\perp}$ ont la forme désirée. Dans la base concaténée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ obtenue par recollement de $\mathcal{B}_E$ et de $\mathcal{B}_{E^\perp}$ (et qui est encore une base orthonormale !), f a la forme désirée. Ceci conclut la récurrence.

Remark 0.8. — On se place dans un espace euclidien E. Se souvenir de ce résultat fondamental : un sous-espace vectoriel $F \subset E$ est stable par $f \in \mathcal{L}(E)$ si et seulement si $F^\perp$ est stable par f^* !

4) Si A est antisymétrique, alors A^2 est symétrique puisque : ${}^t(A^2) = ({}^tA)^2 = (-A)^2 = A^2$. De plus, on vérifie que A^2 est négative. Pour $x \in \mathbb{R}^n$:

$$(A^2x|x) = (Ax|{}^tAx) = -(Ax|Ax) \leqslant 0$$

Donc A^2 est diagonalisable dans une base orthonormée et ses valeurs propres sont négatives ou nulles. Désignons les valeurs propres strictement négatives par $-\lambda_1 < ... < -\lambda_p < 0$, comptées sans leur multiplicité. On note encore f l'endomorphisme tel que A soit sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Maintenant, il faut faire attention à une chose : si 0 est valeur propre de f^2 (c'est-à-dire de A^2) ou non. Dans tous les cas, on écrit

$$\mathbb{R}^n = E_0(f^2) \oplus \bigoplus_{i=1}^{p} E_{-\lambda_i}(f^2),$$

et l'espace $E_0(f^2)$ est éventuellement réduit à $\{0\}$ si 0 n'est pas valeur propre de A^2. Montrons deux choses :

(1) $E_0(f^2) = \ker f^2$ est en fait égal à $E_0(f)$. En effet, si pour un $x \in \mathbb{R}^n, f(x) = 0$, alors $f^2(x) = 0$. Mais réciproquement, si $f^2(x) = A^2x = 0$, alors $(x, A^2x) = 0 = -(Ax, Ax) = -||Ax||^2$ donc $Ax = f(x) = 0$. D'où l'égalité. On note donc $\mathcal{B}_0$ une base orthonormale de $\ker f = E_0(f)$.

(2) On montre que sur chaque espace $E_{-\lambda_i}(f^2)$, on peut trouver une base $\mathcal{B}_\rangle$ telle que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_i$ soit une concaténation de blocs 2×2 de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\lambda_i} \\ \sqrt{\lambda_i} & 0 \end{pmatrix}$$

Prenons un vecteur x unitaire ($||x|| = 1$) dans $E_{-\lambda_i}(f^2)$. On note $f_i = f_{|E_{-\lambda_i}(f^2)}$ l'endomorphisme induit par f sur $E_{-\lambda_i}(f^2)$ (qui est stable, puisque c'est un sous-espace propre de f^2). Par définition, on sait que $f_i^2(x) = -\lambda_i x$. On note alors $\mathcal{B}_x = (x, \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}} f_i(x))$. Montrons déjà que la base $\mathcal{B}_\S$ est orthonormale :

— Ces vecteurs sont unitaires car nous avons choisi $||x|| = 1$ et :

$$||\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} f_i(x))||^2 = \frac{1}{\lambda_i}(f_i(x)|f_i(x)) = -\frac{1}{\lambda_i}(x|f_i^2(x)) = -\frac{1}{\lambda_i} \times (-\lambda_i)||x||^2 = 1$$

— Ces vecteurs sont orthogonaux car

$$(x|\frac{1}{\lambda_i} f_i(x)) = 0,$$

d'après la question 1).

Ensuite, il est clair que dans la base $\mathcal{B}_x$ la matrice 2×2 de l'endomorphisme induit par f est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\lambda_i} \\ \sqrt{\lambda_i} & 0 \end{pmatrix}$$

Maintenant, si $E_{-\lambda_i}(f^2) = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_x))$ (donc n'est que de dimension 2), il suffit de poser $\mathcal{B}_i = \mathcal{B}_x$. Sinon, il faut réitérer l'opération en prenant un nouveau x' dans un supplémentaire orthogonal de $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}_x))$ dans $E_{-\lambda_i}(f^2)$, et en construisant par le même procédé une base $\mathcal{B}_{x'}$. In fine, on pose alors $\mathcal{B}_i = \mathcal{B}_x \oplus \mathcal{B}_{x'} \oplus ....$

Enfin, pour conclure, il suffit de poser $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \bigoplus_{i=1}^{p} \mathcal{B}_i$. Alors, la matrice de f dans cette base a bien la forme désirée.

Remark 0.9. — Ce n'est pas un exercice facile (tombé à l'oral de l'X !) : il demande d'avoir les idées claires sur les procédés de diagonalisation. Néanmoins, il permet de bien réviser toutes les techniques, alors ayez-le à l'esprit.