Espaces préhilbertiens

0.1. Minimisation d'une fonction (**)

On pose

$$f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (a,b,c) & \mapsto & \int_0^1 (\ln(t) - a - bt - ct^2)^2 \, dt \end{array} \right.$$

Déterminer :

$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} f$$

0.2. Théorème de réduction simultanée (**)

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et p, q deux formes bilinéaires symétriques sur E. On se donne une base $\mathcal{B}$ de E et on note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p), B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$.

1) On notera $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$. Rappeler ce que valent les coefficients $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$ des matrices A et B en fonction des formes p et q.
2) On suppose dorénavant q non dégénérée. Rappeler ce que cela signifie. En particulier, qu'en déduit-on pour la matrice B ?
3) Montrer qu'il existe une base simultanément orthogonale pour p et q si et seulement si la matrice $B^{-1}A$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4) Montrer que c'est toujours le cas si q est définie et positive. Montrer que cette base peut alors être choisie orthonormale pour q.
5) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telle que $A = {}^tPDP, B = {}^tPP$.

Correction

On note

$$\varphi : \left| \begin{array}{l} E \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n \\ x \mapsto X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \end{array} \right.$$

l'application qui associe à un vecteur x de E ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. Dans la suite, étant donné $x \in E$, on désignera par X le vecteur-colonne $\varphi(x)$ (sans éventuellement reparler de l'application φ).

1) On rappelle que, par définition de la matrice A :

$$\forall x, y \in E, \quad p(x,y) = (X, AY) = {}^tXAY$$

Prenons $x = e_i, y = e_j$, c'est-à-dire :

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = E_i, \quad Y = E_j$$

Alors : $p(e_i, e_j) = {}^tE_iAE_j = a_{i,j}$.

2) Par définition, q est non dégénérée si et seulement si pour tout $x_0 \in E$:

$$(\forall y \in E, q(x_0, y) = 0) \Rightarrow x_0 = 0$$

C'est équivalent au fait que B soit inversible. En effet :

$$\begin{aligned} B \text{ est inversible} &\Leftrightarrow \ker B = \{0\} \\ &\Leftrightarrow \{X \in \mathbb{R}^n, \quad BX = 0\} = \{0\} \\ &\Leftrightarrow \left\{X \in \mathbb{R}^n, \quad \forall Y \in \mathbb{R}^n, \quad {}^tYBX = 0\right\} = \{0\} \\ &\Leftrightarrow \varphi\left(\{x \in E, \quad \forall y \in E, \quad q(x,y) = 0\}\right) = \{0\} \end{aligned}$$

Remark 0.1. — Faisons une remarque importante qui nous servira pour la suite. On a noté $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$. Supposons que l'on se donne $\mathcal{B}'$ une seconde base de E. Alors, quelle va être la matrice $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$? Notons P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Autrement dit $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ (c'est la matrice obtenue en exprimant les vecteurs de base de $\mathcal{B}'$ en fonction des vecteurs de la base $\mathcal{B}$). Si x est un vecteur de E, alors il est représenté par $X \in \mathbb{R}^n$ dans la base $\mathcal{B}$ et par X' dans la base $\mathcal{B}'$, et ils sont reliés par relation : $X = PX'$. Mais alors, pour $x, y \in E$:

$$p(x,y) = {}^tXAY = {}^tX'A'Y'$$

En injectant dans cette relation les égalités $Y = PY', X = PX'$, il vient :

$${}^tX'{}^tPAPY' = {}^tX'AY$$

Autrement dit :

$$A' = {}^tPAP$$

Remark 0.2. — Si p est une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel E, alors p admet une base $\mathcal{B}$ dans laquelle elle est orthogonale. En effet, prenons une base $\mathcal{B}_0$ sur E et notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(p)$. La matrice A est symétrique donc diagonalisable dans une base orthonormale, c'est-à-dire qu'il existe $P \in O_n(\mathbb{R}), D$ diagonale telles que :

$$D = {}^tPAP$$

Mais alors, d'après la remarque précédente, cela signifie précisément qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = D$. Puisque la matrice est diagonale, la base $\mathcal{B}$ est bien orthogonale pour p.

3) On dit qu'une base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ est orthogonale pour la forme bilinéaire p si et seulement si :

$$\forall i \neq j \in [|1, n|], \quad p(e_i, e_j) = 0$$

Ainsi, dire que p et q admettent une base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ orthogonale pour p et q revient à dire que pour tout $i \neq j \in [|1, n|], p(e_i, e_j) = q(e_i, e_j) = 0$.

Par conséquent, d'après la remarque précédente, si p et q admettent une base orthogonale commune $\mathcal{B}'$, cela signifie qu'il existe deux matrices diagonales D_p et D_q, ainsi qu'une matrice de passage $P(= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}))$ telles que :

$$A = {}^tPD_pP, \quad B = {}^tPD_qP$$

Mais par hypothèse, q est non dégénérée, c'est-à-dire que B est inversible et par conséquent D_q également. Donc :

$$B^{-1}A = P^{-1}(D_q^{-1}D_p)P$$

Alors $B^{-1}A$ est diagonalisable car semblable à une matrice diagonale.

Réciproquement, on suppose que $B^{-1}A$ est diagonalisable. On peut donc écrire :

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(B^{-1}A)} E_\lambda(B^{-1}A)$$

Si on note $e_\lambda = \varphi^{-1}(E_\lambda)$, alors ceci se réécrit en :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(B^{-1}A)} e_\lambda$$

On montre alors plusieurs choses.

(1) La matrice $B^{-1}A$ n'est pas symétrique, mais elle possède la même propriété remarquable que les matrices symétriques : ses sous-espaces sont orthogonaux pour les formes p et q. En effet, prenons $\lambda \neq \mu$ et $x \in e_\lambda, y \in e_\mu$. Il vient :

$$p(x, y) = {}^tXAY = {}^tXB(B^{-1}AY) = \mu{}^tXBY = \mu q(x, y)$$

Mais dans l'autre sens, on a également :

$$p(y,x) = {}^tYAX = {}^tYB(B^{-1}AX) = \lambda^tYBX = \lambda q(y,x) = \lambda q(x,y)$$

Et $p(y,x) = p(x,y)$ puisque les formes p et q sont symétriques. D'où :

$$0 = (\lambda - \mu)q(x,y)$$

Or, par hypothèse $\lambda \neq \mu$, donc $q(x,y) = 0$ et on en déduit que $p(x,y) = 0$. Autrement dit, la somme des espaces e_λ est orthogonale pour p et q.

(2) Les formes p et q sont proportionnelles sur les espaces e_λ. En effet, si $x, y \in e_\lambda$, alors :

$$p(x,y) = {}^tXAY = {}^tXB(B^{-1}AY) = \lambda^tXBY = \lambda q(x,y)$$

(3) Par hypothèse, $p_{|e_\lambda}$ est symétrique (puisque p l'est) donc d'après une des remarques précédentes que nous avons faites, $p_{|e_\lambda}$ admet une base orthogonale $\mathcal{B}_\lambda$ de e_λ. Par le point (2), il est clair que $\mathcal{B}_\lambda$ est aussi orthogonale pour q.

On pose alors la base concaténée :

$$\mathcal{B} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(B^{-1}A)} \mathcal{B}_\lambda$$

Mais, d'après le point (1), il s'agit également d'une base orthogonale pour p et q. Cela conclut la question.

4) On suppose donc dans cette question que q est symétrique définie positive. En terme matriciel, cela signifie donc que $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrons alors que $B^{-1}A$ est diagonalisable, ce qui permettra de conclure par la question précédente. On sait que l'on peut écrire, avec $P \in O_n(\mathbb{R})$:

$$B = {}^tP \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} P,$$

où les $\lambda_i > 0$. La technique consiste à montrer que $B^{-1}A$ est semblable à une matrice diagonale. Pour cela, on pose :

$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P$$

On remarque en particulier que ${}^tMM = B$. D'où :

$$B^{-1}A = M^{-1}{}^tM^{-1}A = M^{-1}{}^tM^{-1}AM^{-1}M$$

Ainsi, $B^{-1}A$ est semblable à ${}^tM^{-1}AM^{-1}$. Mais c'est une matrice symétrique, car A est symétrique. Donc, on sait qu'elle est diagonalisable. Ainsi $B^{-1}A$ est diagonalisable.

Remark 0.3. — On a utilisé une technique astucieuse en faisant apparaître un terme factice $M^{-1}M$ dans le calcul.

D'après la question précédente, on sait donc qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle p et q sont simultanément orthogonales. On note $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ cette base. Mais alors, si on considère la base $\mathcal{B}' = \left(\frac{1}{\sqrt{q(e_1, e_1)}}e_1, ..., \frac{1}{\sqrt{q(e_n, e_n}}\right.$ (ce qui est licite puisque q est définie positive et $q(e_i, e_i) > 0$), il est clair qu'elle est orthonormale pour q.

5) C'est en fait une version matricielle du résultat précédent. On s'aide pour cela de la remarque préliminaire que nous avons formulée. On prend $E = \mathbb{R}^n$ et notons $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On considère p et q les formes bilinéaires sur $\mathbb{R}^n$ définies par :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(p), \qquad B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(q)$$

D'après le résultat précédent, on sait qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$, orthogonale de p et orthonormale de q. Autrement dit :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = I_n$$

Mais alors, d'après la remarque préliminaire, on sait qu'il existe une matrice de passage P telle que :

$$A = {}^tPDP, \qquad B = {}^tPP$$