Suites et séries de fonctions

0.1. Convergence uniforme des fonction continues (*)

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ (avec éventuellement $I = \mathbb{R}$). On suppose qu'il existe une suite de fonctions continues $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur I, convergeant uniformément vers f sur I.

(1) Montrer que f est continue sur I.

(2) Soit a une extrémité de I. On suppose que $\lim_{x\to a} f_n(x) = l_n$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x)$$

0.2. Etude de suites de fonctions (**)

Etudier les différents modes de convergence des suites de fonctions suivantes, et caractériser leur limite :

(1) $f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+x^n)}$, sur $[0,+\infty[$

(2) $f_n(x) = x^2 \sin(\dfrac{1}{nx})$, sur $\mathbb{R}$ (on étudiera d'abord le prolongement des f_n en 0)

(3) $f_n(x) = \begin{cases} (1-\dfrac{x}{n})^n, & \text{si } x \in [0,n] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$, sur $[0,a]$ (pour un certain $a > 0$), puis sur $\mathbb{R}^+$

0.3. Etude de séries de fonctions (**)

Etudier les différents modes de convergence des séries de fonctions suivantes, et caractériser leur limite :

(1) $f_n(x) = \dfrac{1}{x^2+n^2}$, sur $\mathbb{R}$

(2) $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x^2}$, sur $\mathbb{R}$

(3) $f_n(x) = \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$, sur $[0,+\infty[$ (on étudiera d'abord la convergence de la suite de fonctions, puis de la série)

(4) $f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$, sur $[0,+\infty[$

0.4. Etude asymptotique (***)

On pose pour $x > 0$:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + n^2 x}$$

(1) Montrer que S est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

(2) Donner un équivalent de S en $+\infty$.

(3) Donner un équivalent de S en 0.

0.5. Etude asymptotique (***)

On définit pour $x \in \mathbb{R}$:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x + n}$$

(1) Etudier le domaine de définition de S, ainsi que sa continuité.

(2) Donner un développement asymptoqique de S en $+\infty$.