Fonctions de la variable réelle

0.1. Théorème de Riemann-Lebesgue (**)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

(1) Montrer que :
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t)e^{int}\ dt = 0$$
Donner une interprétation au résultat précédent.

(2) Calculer :
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi f(t)|\sin(nt)|\ dt$$

0.2. Propriété des fonctions convexes (*)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que f est continue.

0.3. Une caractérisation des fonctions convexes (**)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que :
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x) + f(y)}{2}$$
Montrer que f est convexe.

Une inégalité de Jensen (**)

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue.

(1) Montrer que :
$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\ dt\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(f(t))\ dt$$

(2) On suppose désormais que φ est dérivable. Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que :
$$\varphi(x) \geqslant \varphi(y) + \varphi'(y)(x - y)$$

(3) En déduire une autre démonstration de la première question.

0.4. La valeur principale de $1/x$ (**)

Dans cet exercice, on notera $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact. Autrement dit, si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors φ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ telle qu'il existe un compact $K \subset \mathbb{R}$ tel que $\varphi \equiv 0$ en dehors de K.

(1) Donner un exemple explicite de fonction non nulle dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

(2) On suppose que $\varphi(0) = 0$. Montrer qu'il existe une fonction $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = x\psi(x)$. Que peut-on dire du support de ψ ?

(3) On définit la valeur principale de $1/x$ par l'application :

$$vp(\frac{1}{x}) : \left| \begin{array}{l} \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ \varphi \mapsto \lim_{\varepsilon \to 0} \displaystyle\int_{\mathbb{R}-[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{\varphi(x)}{x}\ dx \end{array} \right.$$

Montrer que $vp(\frac{1}{x})$ est bien définie et donner une autre expression de $vp(\frac{1}{x})(\varphi)$.

(4) Etablir une majoration de $vp(\frac{1}{x})(\varphi)$ en fonction de $\sup_{\mathbb{R}} |\varphi|$ et $\sup_{\mathbb{R}} |\varphi'|$. Que dire de la forme linéaire $vp(\frac{1}{x})$?

0.5. Dérivée d'une distribution (**)

On reprend les notations de l'exercice précédent. On appelle *distribution* une forme linéaire T définie sur l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

1) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ (f est une fonction définie et intégrable sur $\mathbb{R}$). Montrer que

$$T_f : \left| \begin{array}{l} \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f(x)\ dx \end{array} \right. ,$$

définit bien une distribution. Donner une majoration de $T_f(\varphi)$ en fonction de $\sup_{\mathbb{R}} |\varphi|$.

On définit l'ordre d'une distribution par le plus petit entier $k \in \mathbb{N}$ tel qu'il soit possible de majorer $T_f(\varphi)$ en fonction de $\sup_{\mathbb{R}} |\varphi^{(k)}|$. La notion de distribution est une généralisation de la notion de fonction. On peut définir une dérivée des distributions, de même qu'il existe une dérivée pour les fonctions régulières. Si T est une distribution, on définit la distribution dérivée T' par la formule :

$$T'(\varphi) = T(-\varphi')$$

2) Montrer que T' est bien une distribution. Quel est son ordre, en fonction de celui de T ? Pour $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, calculer la dérivée de la distribution T_f.
3) Montrer que $f : x \mapsto \ln|x|$ définit une distribution sur $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée (au sens des distributions) de f.