Rapport d'EA

L'équation de Boltzmann homogène

T. Lefeuvre

Année 2015 - 2016

École Polytechnique
Université Paris-Saclay

Table des matières

Première partie
Introduction

1 Définition du problème

On trouve un complément sur l'origine physique de l'équation de Boltzmann dans le livre très complet de C. Villani [5]. Nous ne l'étudions ici que d'un point de vue mathématique. On s'intéresse donc à l'équation de Boltzmann homogène dans $\mathbb{R}^3$:

$$\partial_t f(v,t) = Q(f,f)(v,t) \tag{1}$$

supplée d'une donnée initial $f(0,v) = f_0(v)$ qui est une mesure de probabilité. Q est la forme bilinéaire définie par :

$$Q(g,f)(v) = \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{S}^2} \mathcal{B}\left(\frac{v-v_*}{|v-v_*|}\cdot\sigma\right)(f(v')g(v'_*) - f(v)g(v_*))d\sigma dv_* \tag{2}$$

On désigne par $f = f(v,t)$ la densité inconnue, que l'on suppose homogène en espace. De plus, on note :

$$v' = \frac{v+v_*}{2} + \frac{|v-v_*|}{2}\sigma, \quad v'_* = \frac{v+v_*}{2} - \frac{|v-v_*|}{2}\sigma \tag{3}$$

avec $\sigma \in \mathbb{S}^2$. $\mathcal{B}$ est le noyau de collision : c'est une fonction positive qui dépend du type de collision considéré. Dans le cas de collisions de Maxwell (la collision ne dépend pas de la vitesse relative, mais uniquement de l'angle de déviation), $\mathcal{B}$ présente une singularité de type non-intégrabilité lorsque $t \to 1$. Enfin, on demande à f d'être de masse unité et centrée en 0 mais non nécessairement de second moment intégrable, c'est-à-dire :

$$\int_{\mathbb{R}^3} f_0(v)dv = 1, \int_{\mathbb{R}^3} f_0(v)|v|^2 dv \leq \infty, \int_{\mathbb{R}^3} f_0(v)v_i dv = 0 \quad (i = 1,2,3) \tag{4}$$

Remarque : *Dans le cas où f_0 est de second moment intégrable, on peut montrer que f est de second moment intégrable, définie en tout temps, et converge en temps long vers une distribution de Maxwell pour diverses normes. L'article s'intéresse précisément au cas où f_0 n'est pas nécessairement de second moment intégrable.*

Par application de la transformée de Fourier, on peut montrer que l'équation (1) est équivalente à :

$$\partial_t \phi(\xi,t) = \int_{\mathbb{S}^2} \mathcal{B}\left(\frac{\xi\cdot\sigma}{|\xi|}\right)(\phi(\xi^+,t)\phi(\xi^-,t) - \phi(\xi,t)\phi(0,t))d\sigma \tag{5}$$

où $\xi^+ = \dfrac{\xi + |\xi|\sigma}{2}, \xi^- = \dfrac{\xi - |\xi|\sigma}{2}$. Afin d'être cohérent avec l'équation initiale, on résout (5) dans l'espace des fonctions caractéristiques :

Définition 1 *On appelle fonction caractéristique la transformée de Fourier d'une mesure de probabilité sur* $\mathbb{R}^N$ *de masse* 1.

2 Plan du rapport

Dans ce rapport, deux articles de Cannone et Kach ([2] et [3]) sur l'équation de Boltzmann homogène sont étudiés. Nous reprenons leur preuve de l'existence de solutions pour le problème (5) et nous en détaillons les points essentiels. Une attention particulière est portée à l'application des théorèmes de point fixe et d'Ascoli. Nous avons volontairement passé sous silence la démonstration de certaines inégalités sur les fonctions définies positives car l'intérêt de ces preuves est secondaire. Néanmoins, les propriétés des fonctions définies positives sont essentielles dans la preuve des principaux théorèmes, c'est pourquoi nous leur avons dédié une section. Nous avons également fait le choix de présenter le théorème de Bochner pour son intérêt culturel. Une preuve de ce résultat est fournie.

Dans l'avant-dernière partie, nous soulevons deux questions sur la définition de vitesse d'une solution, ainsi que sur l'approximation d'une solution au voisinage de l'origine. Dans la dernière partie de ce rapport, nous apportons une réponse favorable à la seconde question en démontrant un développement de la solution au voisinage de l'origine, qui est un résultat inédit.

3 Notations utilisées dans la suite

On notera $\mathcal{K}$ l'ensemble des fonctions caractéristiques $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$. Pour toute fonction $\phi \in \mathcal{K}$, on définit :

$$\|\phi\|_\alpha = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^3} \frac{|\phi(\xi)|}{|\xi|^\alpha} \tag{6}$$

On note $\mathcal{K}^\alpha = \{\phi \in \mathcal{K}, \|\phi - 1\|_\alpha < \infty\}$. Remarquons déjà que $\mathcal{K}^0 = \mathcal{K}$. Les espaces $\mathcal{K}^\alpha$ ne sont pas des espaces vectoriels. En revanche, on peut montrer que ce sont des espaces métriques complets pour la distance induite par la semi-norme $\|\cdot\|_\alpha$.

On note $\chi_T^\alpha = C([0,T], \mathcal{K}^\alpha)$ l'espace des fonctions continues de $[0,T]$ à valeurs dans $\mathcal{K}^\alpha$. C'est un espace métrique complet muni de la norme :

$$\|\phi - \tilde{\phi}\|_{\chi_T^\alpha} = \sup_{t\in[0,T]} \|\phi(t) - \tilde{\phi}(t)\|_\alpha \tag{7}$$

Deuxième partie

Démonstration du théorème de Bochner

Cette partie n'est pas véritablement en lien avec le reste de l'exposé, mais j'ai jugé utile de la mettre car elle m'a semble intéressante en terme de culture mathématique. Elle introduit le théorème de Lévy afin d'établir le théorème de Bochner. Nous évoquons néanmoins des propriétés élémentaires des fonctions définies positives, qui sont à la base des démonstrations des inégalités dans l'équation de Boltzmann homogène.

4 Propriétés des fonctions définies positives

Définition 2 *On appelle fonction définie positive toute fonction $\phi : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{C}$ vérifiant :*

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall \xi_1, ..., \xi_k \in \mathbb{R}^N, \forall \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{C}^N, \sum_{i,j=1}^{k} \lambda_i \bar{\lambda_j} \phi(\xi_i - \xi_j) \geq 0 \tag{8}$$

On peut montrer la propriété élementaire suivante :

Proposition 1 *Toute fonction caractéristique ϕ est définie positive, continue sur $\mathbb{R}^N$ et vérifie $\phi(0) = 1$.*

En fait, ce résultat a une réciproque qui est dûe à Bochner, et dont nous détaillerons par la suite la preuve :

Théorème 1 *(de Bochner) :*
Soit $\phi : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction définie positive continue à l'origine et telle que $\phi(0) = 1$. Alors, il existe une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}^N$ telle que $\phi = \widehat{\mu}$. Autrement dit, les fonctions caractéristiques coïncident avec les transformées de Fourier des mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^N$.

Les fonctions définies positives, continues en 0, vérifient de nombreuses inégalités, essentielles dans la démonstration des théorèmes d'existence et d'unicité de solutions à (5). Leur démonstration est basée sur un choix judicieux de nombres (λ_i) dans (8).

Proposition 2 *Soit ϕ une fonction définie positive. Alors :*

— $\overline{\phi(\xi)} = \phi(-\xi)$

— $\sup_{\xi \in \mathbb{R}^3} |\phi(\xi)| = \phi(0)$

— *En outre, si* $\phi(0) = 1$, $|\phi(\xi) - \phi(\eta)|^2 \leq 2(1 - Re(\phi(\xi - \eta)))$ *et* $|\phi(\xi)\phi(\eta) - \phi(\xi + \eta)|^2 \leq (1 - |\phi(\xi)|^2)(1 - |\phi(\eta)|^2)$.

Remarque : *En particulier, on note qu'une fonction définie positive est continue si et seulement si elle est continue en l'origine.*

5 Preuve du théorème de Bochner

Dans un premier temps, nous prouvons le résultat dans le cas simplifié où ϕ est intégrable, puis nous construisons une suite de fonctions intégrables $\phi_n = \widehat{\mu_n}$ qui converge simplement vers ϕ, et nous concluons grâce au théorème de Lévy :

Théorème 2 *(de Lévy) :*
Soit $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de mesures de probabilité sur* $\mathbb{R}^N$ *telle que* $\widehat{\mu_n} \to \phi$ *simplement, où* $\phi : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{C}$ *est continue à l'origine. Alors, il existe une mesure de probabilité* μ *telle que* $\widehat{\mu} = \phi$.

Supposons donc ϕ intégrable sur $\mathbb{R}^N$, et posons :

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} \phi(t) e^{ix \cdot t} dx \tag{9}$$

Montrons que f est une densité de probabilité. Établissons déjà que f est positive. Pour cela, on remarque que pour tout $T > 0$ et $x \in \mathbb{R}^3$, la fonction ϕ vérifie :

$$0 \leq \int_{[0,T]^3} \int_{[0,T]^3} \phi(t - s) e^{it \cdot x} e^{-is \cdot x} ds \ dt \tag{10}$$

En effet, ceci s'obtient grâce à (8) en écrivant l'intégrale double comme limite d'une somme de Riemann. Mais alors, le changement de variable $k = u - s, l = u + s$ conduit à :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{8T^3} \int_{[-T,T]^3} \int_{[-T,T]^3} \phi(k) e^{ik \cdot x} dk \ dl \\ &= \int_{[-T,T]^3} \phi(k) e^{ik \cdot x} dk \end{aligned} \tag{11}$$

En passant à la limite sur $T \to \infty$, on obtient bien $f(x) \geq 0$.

Il nous reste à établir que pour tout $t \in \mathbb{R}^N$:

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)e^{-ix\cdot t}dx = \phi(t) \tag{12}$$

Dans le cas où f est intégrable, ce résultat est immédiat puisqu'on peut appliquer la transformée de Fourier à la fonction f. Supposons que nous ne connaissons pas de propriété d'intégrabilité pour f. On pose alors pour $\sigma > 0$:

$$f_\sigma(x) = f(x)e^{-|x|^2/2\sigma^2} \tag{13}$$

C'est une fonction intégrable car f est bornée et $x \mapsto e^{-|x|^2/2\sigma^2}$ est intégrable. De plus, par le théorème de Fubini, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} e^{-it\cdot x} f_\sigma(x)dx &= \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-it\cdot x}\left(\int_{\mathbb{R}^N} e^{ix\cdot u}\phi(u)du\right)e^{-|x|^2/2\sigma^2}dx \\
&= \left(\frac{\sigma^2}{2\pi}\right)^{N/2}\int_{\mathbb{R}^N}\phi(u)\left(\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}}\int_{\mathbb{R}^N} e^{i(u-t)\cdot x-|x|^2/2\sigma^2}dx\right)du \\
&= \left(\frac{\sigma^2}{2\pi}\right)^{N/2}\int_{\mathbb{R}^N}\phi(u)e^{-|u-t|^2\sigma^2/2}du \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\mathbb{R}^N}\phi(\frac{s}{\sigma}+t)e^{-|s|^2/2}ds
\end{aligned} \tag{14}$$

On peut ensuite passer à la limite pour $\sigma \to \infty$. A droite, cela est licite : le théorème de convergence dominée s'applique immédiatement et ϕ est continue. A gauche, remarquons que $(f_\sigma)_{\sigma>0}$ est une famille de fonctions positives croissantes avec σ. En faisant $t = 0$, il vient :

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_\sigma(x)dx \leq \|\phi\|_\infty \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\mathbb{R}^N} e^{|s|^2/2}ds = \|\phi\|_\infty \leq 1 \tag{15}$$

Par conséquent, le théorème de Beppo-Lévy nous permet d'écrire : $\int_{\mathbb{R}^N} f(x)dx \leq 1$. Ensuite, la majoration évidente : $|e^{-it\cdot x}f_\sigma(x)| \leq |f(x)| = f(x) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ nous permet d'appliquer le théorème de convergence dominée. D'où :

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-it\cdot x}f(x)dx = \phi(t) \tag{16}$$

En particulier, on obtient que : $\int_{\mathbb{R}^N} f(x)dx = \phi(0) = 1$. Ainsi f est une densité de probabilité.

Dans le cas où ϕ n'est pas intégrable, on pose :

$$\phi_\sigma(t) = \phi(t)e^{-|t|^2/2\sigma^2} = \left(\frac{\sigma^2}{2\pi}\right)^{N/2} \int_{\mathbb{R}^N} \phi(t)e^{ix\cdot t}e^{-|x|^2/2\sigma^2}dx \tag{17}$$

Remarquons que ϕ_σ est une combinaison convexe des fonctions positives définies $t \mapsto \phi(t)e^{ix\cdot t}$ donc ϕ_σ est aussi définie positive. De plus, les ϕ_σ sont continues et valent 1 à l'origine. Par suite, les ϕ_σ sont des fonctions caractéristiques d'après ce que nous venons d'établir. Puisque $\phi_\sigma \to \phi$ simplement lorsque $\sigma \to \infty$, le théorème de continuité de Lévy permet de conclure que ϕ est une fonction caractéristique.

Troisième partie

Résolution dans le cas $\mathcal{B} \in L^1(]-1,1[)$

Il s'agit en fait du cas $\alpha_0 = 0$. On va montrer que pour tout $\phi_0 \in \mathcal{K}^\alpha$, où $\alpha \in [0,2]$, il existe une unique solution $\phi \in \chi_T^\alpha = C([0,T], \mathcal{K}^\alpha)$ définie sur un intervalle de temps $[0,T]$, et dont la condition initiale est ϕ_0.
Dans le cas où $\mathcal{B} \in L^1(]-1,1[)$, l'équation (5) peut se réécrire :

$$\partial_t \phi(\xi,t) + \phi(\xi,t) \int_{\mathbb{S}^2} \mathcal{B}\left(\frac{\xi \cdot \sigma}{|\xi|}\right) d\sigma = \left(\int_{\mathbb{S}^2} \mathcal{B}\left(\frac{\xi \cdot \sigma}{|\xi|}\right) d\sigma \phi(\xi^+, t)\phi(\xi^-, t)\right) =: \mathcal{G}(\phi(t))(\xi) \tag{18}$$

car $\phi(0,t) = 1$ puisque ϕ est une fonction caractéristique, et où $\phi(t) = \phi(\cdot, t)$. Notons que par un changement adapté de variable :

$$\int_{\mathbb{S}^2} \mathcal{B}\left(\frac{\xi \cdot \sigma}{|\xi|}\right) = 2\pi \int_{-1}^{1} \mathcal{B}(s) ds = \gamma_2 \tag{19}$$

Par suite, en multipliant par $e^{-\gamma_2 t}$, puis en intégrant entre 0 et t, on obtient que ϕ est solution de (5) si et seulement si :

$$\phi(\xi,t) = \mathcal{F}(\phi(t))(\xi) := \phi_0(\xi) e^{-\gamma_2 t} + \int_0^t e^{-\gamma_2 (t-\tau)} \mathcal{G}(\phi(\tau))(\xi) d\tau \tag{20}$$

On peut montrer que $\mathcal{F}$ est à valeur dans $\chi_T^\alpha = C([0,T], \mathcal{K}^\alpha)$ via l'inégalité :

$$\|\mathcal{F}(\phi) - 1\|_{\chi_T^\alpha} \leq \|\alpha_0 - 1\|_\alpha + \gamma_\alpha T \|\phi - 1\|_{\chi_T^\alpha} < \infty \tag{21}$$

où γ_α est une constante strictement positive uniquement dépendante de α. On se ramène ainsi à un problème de point fixe dans l'espace χ_T^α. Ce dernier étant complet (car $\mathcal{K}^\alpha$ l'est), il suffit de montrer que l'application est contractante pour T suffisamment petit, ce qui permet de conclure. Ce dernier point est obtenu par l'inégalité :

$$\|\mathcal{F}(\phi) - \mathcal{F}(\tilde{\phi})\|_{\chi_T^\alpha} \leq \gamma_\alpha T \|\phi - \tilde{\phi}\|_{\chi_T^\alpha} \tag{22}$$

Dès que $T < \gamma_\alpha^{-1}$, l'application est contractante. Précisons que la précédente inégalité s'obtient grâce à des inégalités élémentaires sur les fonctions caractéristiques.

Une fois ce point établi, il est facile de constater que l'on a en fait établi l'existence et l'unicité d'une solution définie sur $\mathbb{R}^+$ puisqu'en répétant le processus, on obtient une solution également définie sur $[T, 2T]$ de donnée initiale $\phi(\cdot, T)$, puis une solution sur $[2T, 3T]$, etc...

Quatrième partie

Résolution dans le cas général

6 Idée de la preuve

On suppose à présent qu'il existe $\alpha_0 \in [0,2]$ tel que : $(1-s^2)^{\alpha_0/4}\mathcal{B}(s) \in L^1(]-1,1[)$. L'idée est ici d'approcher le noyau de collision $\mathcal{B}$ par des noyaux $\mathcal{B}_n \in L^1(]-1,1[)$, ce qui fournit des solutions ϕ_n à l'équation, puis de montrer la convergence (à extraction près) des ϕ_n vers une fonction ϕ, solution de l'équation pour le noyau de collision $\mathcal{B}$. On pose donc pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{B}_n(s) := \min(\mathcal{B}(s), n) \in L^1(]-1,1[) \tag{23}$$

On note $\phi_n \in C(\mathbb{R}^+, \mathcal{K}^\alpha)$ les solutions correspondantes à l'équation (5) pour les noyaux $\mathcal{B}_n$, de condition initiale $\phi_0 \in \mathcal{K}^\alpha$. Afin d'obtenir une suite extraite convergente $(\phi_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, l'auteur propose d'appliquer le théorème d'Ascoli dans $C(\mathbb{R}^+, \mathcal{K}^\alpha)$ vu comme sous-ensemble de $C(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3, \mathbb{C})$, ce qui fournit une convergence uniforme sur tout compact $[0,T] \times K$, où $K \subset \mathbb{R}^3$.

7 Remarque préliminaire

On pourrait être tenté d'appliquer une version plus générale du théorème d'Ascoli, à savoir :

Théorème 3 *(d'Ascoli) :*
Si (X,d) est un espace métrique compact, (Y,δ) un espace métrique complet, et $\mathcal{A}$ une partie de $C(X,Y)$ vérifiant la propriété d'équicontinuité et telle que pour tout $x \in X, \{f(x), f \in \mathcal{A}\}$ est d'adhérence compacte, alors $\mathcal{A}$ est d'adhérence compacte pour la distance de la convergence uniforme.

Ici, on aurait $X = [0,T], Y = \mathcal{K}^\alpha$, $\mathcal{A} = \{t \mapsto \phi_n(t,\cdot), n \in \mathbb{N}\}$. Le problème qui se pose alors est de montrer que les ensembles $\{\xi \mapsto \phi_n(t,\xi), n \in \mathbb{N}\}, t \in [0,T]$ sont d'adhérence compacte (pour la métrique sur $\mathcal{K}_\alpha$). Or, ceci n'est pas évident du tout. On pourrait être tenté de vouloir appliquer à nouveau le théorème d'Ascoli pour obtenir ce résultat, ce qui inviterait à montrer que ses hypothèses sont vérifiées pour la famille de fonction $\left\{\xi \mapsto \dfrac{\phi_n(t,\cdot)-1}{|\xi|^\alpha}, n \in \mathbb{N}\right\}$. Or, la continuité de ces fonctions n'est même pas garantie. En revanche, si l'on fait l'hypothèse supplémentaire suivante :

$$\lim_{|\xi|\to 0} \frac{\phi_0(\xi)-1}{|\xi|^\alpha} = K \tag{24}$$

alors la proposition (4) combinée à l'estimation d'équicontinuité en espace (29) en dehors d'un voisinage de 0 montre que la famille de fonctions $\left\{\xi \mapsto \frac{\phi_n(t,\cdot)-1}{|\xi|^\alpha}, n \in \mathbb{N}\right\}$ est équicontinue. De plus, à ξ fixé, les $\left\{\frac{\phi_n(t,\xi)-1}{|\xi|^\alpha}, n \in \mathbb{N}\right\}$ sont d'adhérence compacte. En effet, on a la majoration suivante, indépendante de n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\frac{\phi_n(t,\xi)-1}{|\xi|^\alpha}\right| \le \|\phi_n(t)-1\|_\alpha \le e^{\lambda_\alpha t}\|\phi_0-1\|_\alpha \tag{25}$$

Ainsi, pour tout $t \in [0,T]$, $\left\{\xi \mapsto \frac{\phi_n(t,\cdot)-1}{|\xi|^\alpha}, n \in \mathbb{N}\right\}$ est d'adhérence compacte (pour la norme du sup), donc $\{\xi \mapsto \phi_n(t,\xi), n \in \mathbb{N}\}$ l'est pour la métrique sur $\mathcal{K}^\alpha$.

Les hypothèses du théorème d'Ascoli sont donc vérifiées. Par conséquent, on peut extraire de la suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite $(\phi_{n_k})_{n_k}$ qui converge vers $\phi \in \mathcal{K}^\alpha$ au sens :

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\phi_{n_k}(t)-\phi(t)\|_\alpha \to_{n_k\to\infty} 0 \tag{26}$$

On vérifie alors, comme dans le paragraphe suivant, que la fonction ϕ est solution de l'équation homogène pour le noyau $\mathcal{B}$ donné.

8 Preuve du théorème

Il est donc plus facile de considérer les ϕ_n comme des éléments de $C(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ que comme des éléments de $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{K}^\alpha)$. Soit $[0,T] \times K, K \subset \mathbb{R}^3$, un compact de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3$. Vérifions alors que les hypothèses du théorème d'Ascoli s'appliquent :

— Les ϕ_n sont uniformément bornées par 1 en tant que fonctions caractéristiques : $\forall t \in [0,T], \forall \xi \in K, |\phi_n(t,\xi)| \le 1$.

— Les ϕ_n sont équicontinues. On va montrer séparément qu'elles sont équicontinues et temps, puis en espace, ce qui permettra de conclure par l'inégalité :

$$|\phi_n(t,\xi)-\phi_n(s,\eta)| \le |\phi_n(t,\xi)-\phi_n(t,\eta)| + |\phi_n(t,\eta)-\phi_n(s,\eta)| \tag{27}$$

L'équicontinuité en temps s'obtient par majoration uniforme de la dérivée :

$$|\partial_t \phi_n(\xi,t)| \leq 4\beta_\alpha e^{\lambda_\alpha t}\|\phi_0 - 1\|_\alpha |\xi|^\alpha \leq 4\beta_\alpha e^{\lambda_\alpha T}\|\phi_0 - 1\|_\alpha \mathrm{sup}_K |\xi|^\alpha \tag{28}$$

L'équicontinuité en espace s'obtient par :

$$|\phi_n(\xi,t) - \phi_n(\eta,t)| \leq \sqrt{2}|\xi - \eta|^{\alpha/2} e^{\lambda_\alpha T/2}\|\phi_0 - 1\|_\alpha^{1/2} \tag{29}$$

Par le théorème d'Ascoli, on en déduit qu'il existe une une suite extraite $(\phi_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers une fonction ϕ sur $[0,T]\times K$.

Il s'agit à présent de construire une solution ϕ définie sur $[0,+\infty[\times\mathbb{R}^3$. Considérons pour $n \geq 1$ des ensembles de la forme $[0,n]\times K_n$ où $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de compacts de $\mathbb{R}^3$ telle que la réunion $\cup_{n\in\mathbb{N}} K_n = \mathbb{R}^3$. A chaque ensemble $[0,n]\times\mathbb{R}^3$ correspond une suite $(\phi_k^n)_{k\in\mathbb{N}}$ de fonctions construites par troncature du noyau, et telle qu'on puisse en extraire une suite $(\phi^n_{\psi_n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ convergant vers une solution de l'équation sur $[0,n]\times K_n$. Soit $n > 1$, on sait que $(\phi^n_{\psi_n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une solution de l'équation sur $[0,n]\times K_n$, mais cette suite de fonctions définit également une suite de fonction $(\phi^n_{\psi_n(k)}|_{[0,n-1]\times K_{n-1}})_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant les hypothèses du théorème d'Ascoli sur $[0,n-1]\times K_{n-1}$. Il est donc possible d'en extraire une suite $(\phi^n_{\psi_{n-1}\circ\psi_n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une solution de l'équation sur $[0,n]\times K_n$ ainsi que sur $[0,n-1]\times K_{n-1}$. On construit ainsi par récurrence une extractrice $\psi(k) = \psi_1\circ ...\circ\psi_n(k)$ telle que la suite $(\phi^n_{\psi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge sur tout compact $[0,k]\times K_k$ (pour $1\leq k\leq n$) vers une solution de l'équation. On pose alors $\phi_n = \phi^n_{\psi_1\circ...\circ\psi_n(n)}$ et $\phi(\xi,t) = \lim_{n\to+\infty}\phi_n(\xi,t)$. Par construction, ϕ est solution de l'équation sur $[0,+\infty[\times\mathbb{R}^3$.

Il reste à vérifier que 1) $\phi(t)\in\mathcal{K}^\alpha$, pour tout $t\in[0,T]$, et que 2) ϕ est bien solution de (5) pour le noyau $\mathcal{B}$.

1) Ce premier point est en fait assez immédiat puisque :

$$\forall n\in\mathbb{N}, \forall t\in[0,T], \|\phi_n(t) - 1\|_\alpha \leq e^{\lambda_\alpha t}\|\phi_0 - 1\|_\alpha < \infty \tag{30}$$

D'après le théorème de Lévy, ϕ est une fonction caractéristique en tant que fonction continue à l'origine qui est une limite simple des fonctions caractéristiques ϕ_n.

2) Il est possible de montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}, t\geq 0, \xi\in\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}&\mathcal{B}_n\left(\frac{\xi\cdot\sigma}{|\xi|}\right)(\phi_n(\xi^+,t)\phi_n(\xi^-,t) - \phi_n(\xi,t)\phi_n(0,t))d\sigma \\ &\leq 4e^{\lambda_\alpha t}\|\phi_0 - 1\|_\alpha \mathcal{B}\left(\frac{\xi\cdot\sigma}{|\xi|}\right)|\xi^+|^{\alpha/2}\xi^-|^{\alpha/2}\end{aligned} \tag{31}$$

où la fonction à droite est intégrable sur la sphère $\mathbb{S}^2$ (et indépendante de n). Par convergence dominée, on peut alors passer à la limite dans l'opérateur de Boltzmann, de sorte que :

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall \xi \in \mathbb{R}^3, \lim_{n\to\infty} \partial_t \phi_n(\xi,t) &= \zeta(\xi,t) \\ &= \int_{\mathbb{S}^2} \mathcal{B}\left(\frac{\xi\cdot\sigma}{|\xi|}\right)(\phi(\xi^+,t)\phi(\xi^-,t) - \phi(\xi,t)\phi(0,t))d\sigma\end{aligned} \tag{32}$$

En outre, la convergence de l'opérateur de Boltzmann étant uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3$, et l'opérateur étant continu, il est clair que ζ est continue. Mais $\phi(\xi,t) = \lim_{n\to\infty} \phi_n(\xi,t)$ donc nécessairement $\zeta = \partial_t \phi$. Ainsi ϕ est solution du problème initial.

L'unicité s'obtient grâce à un théorème de stabilité en temps que l'on prouve dans un premier temps pour $\mathcal{B} \in L^1(]-1,1[)$, puis s'étend par la même construction :

Théorème 4 *On suppose qu'il existe un* $\alpha_0 \in [0,2]$ *tel que* $(1-s^2)^{\alpha_0/4}\mathcal{B}(s) \in L^1(]-1,1[)$. *Soit* $\alpha \in [\alpha_0, 2]$, $\phi, \tilde{\phi} \in C([0,\infty[, \mathcal{K}^\alpha)$ *des solutions de* (5) *pour les conditions initiales respectives* $\phi, \phi_0 \in \alpha$ *. Alors, il existe une constante* λ_α *telle que :*

$$\forall t \geq 0, \|\phi(t) - \tilde{\phi}(t)\|_\alpha \leq e^{\lambda_\alpha t}\|\phi_0 - \tilde{\phi}_0\|_\alpha \tag{33}$$

Ce théorème de stabilité permet en fait d'établir sans difficulté un théorème sur la convergence asymptotique de solutions qui sont "proches" à l'origine en un certain sens. En fait, on peut dire qu'en temps long, la solution est déterminée dans tout l'espace à partir de l'état initial au voisinage de l'origine :

Théorème 5 *On suppose qu'il existe un* $\alpha_0 \in]0,2[$ *tel que* $(1-s^2)^{\alpha_0/4}\mathcal{B}(s) \in L^1(]-1,1[)$. *Soit* $\alpha \in [\alpha_0, 2[$, $\phi, \tilde{\phi} \in C([0,\infty[, \mathcal{K}^\alpha)$ *des solutions de* (5) *de conditions initiales respectives* $\phi_0, \tilde{\phi}_0 \in \mathcal{K}^\alpha$ *telles que :*

$$\lim_{|\xi|\to 0} \frac{\phi_0(\xi) - \tilde{\phi}_0(\xi)}{|\xi|^\alpha} = 0 \tag{34}$$

Alors :

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\lambda_\alpha t}\|\phi(t) - \tilde{\phi}(t)\|_\alpha = 0 \tag{35}$$

Cinquième partie
Solutions auto-similaires

9 Principaux résultats

Les solutions auto-similaires jouent un rôle central dans l'équation de Boltzmann homogène, semblables aux distributions de Maxwell dans le cas $\alpha = 2$. Définissons $\phi(\xi, t) = \Phi(e^{\mu_\alpha t}\xi)$, où $\Phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$ et :

$$\mu_\alpha = \frac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{S}} \mathcal{B}\left(\frac{\eta \cdot \sigma}{|\eta|}\right) \left(\frac{|\eta^+|^\alpha + |\eta^-|^\alpha}{|\eta|^\alpha} - 1\right) d\sigma, \tag{36}$$

où on a posé $\eta = \phi, \tilde{\phi}$. La fonction ϕ est solution de (5) si et seulement si Φ est solution de :

$$\mu_\alpha \eta \cdot \nabla\Phi(\eta) = \int_{\mathbb{S}} \mathcal{B}\left(\frac{\eta \cdot \sigma}{|\eta|}\right) (\Phi(\eta^+, t)\Phi(\eta^-, t) - \Phi(\eta, t)\Phi(0, t))d\sigma \tag{37}$$

On a alors le théorème suivant dû à Bobylev et Cergignani :

Théorème 6 *(Bobylev, Cercignani) :*
On suppose que $\mathcal{B}$ vérifie la condition affaiblie d'intégrabilité suivante : il existe $\alpha \in]0, 2[$ tel que : $(1-s^2)^{\alpha_0/2}\mathcal{B}(s) \in L^1(]-1, 1[)$. Soit $K < 0$ et μ_α défini précédemment. Alors, il existe une solution $\Phi_{\alpha,K} \in \mathcal{K}^\alpha$ ([1]) de (37) qui est radialement symétrique et vérifie la condition à l'origine :

$$\lim_{|\eta|\to 0} \frac{\Phi_{\alpha,K}(\eta) - 1}{|\eta|^\alpha} = K \tag{38}$$

On note alors $\phi_{\alpha,K}(\xi, t) = \Phi_{\alpha,K}(e^{\mu_\alpha t}\xi)$ la solution de (5) correspondante.

La démonstration de ce théorème se fait par la construction explicite d'une solution sous la forme d'une série uniformément convergente. L'intérêt de ces solutions réside en partie dans la proposition suivante, qui est un corollaire immédiat de (5) :

Proposition 3 *On suppose que $\mathcal{B}$ vérifie la condition d'intégrabilité suivante : il existe $\alpha_0 \in]0, 2[$ tel que : $(1 - s^2)^{\alpha_0/4}\mathcal{B}(s) \in L^1(] - 1, 1[)$. Soit $\alpha \in [\alpha_0, 2[$. Soit ϕ une solution de (5) pour la condition initiale $\phi_0 \in \mathcal{K}^\alpha$ vérifiant à l'origine :*

1. On peut montrer que si Φ est une solution vérifiant ces conditions, alors nécessairement, $\mu = \mu_\alpha$ doit vérifier (36).

$$\lim_{|\xi|\to 0} \frac{\phi_0(\xi)-1}{|\xi|^\alpha} = K \tag{39}$$

Alors :

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\lambda_\alpha t}\|\phi(t)-\phi_{\alpha,K}(t)\|_\alpha = 0 \tag{40}$$

Il est possible de renormaliser ceci via $\psi(\xi,t)=\phi(\xi e^{-\mu_\alpha t},t)$ *pour obtenir :*

$$\lim_{t\to\infty} \|\psi(t)-\Phi_{\alpha,K}\|_\alpha = 0 \tag{41}$$

Remarque : *Dans un récent article, Cannone et Kach ont montré que les fonctions* $\Phi_{\alpha,K}$ *étaient en fait des transformée de Fourier de fonctions* $\Psi_{\alpha,K} \in L^1(\mathbb{R}^3)\cap H^\infty(\mathbb{R}^3)$. *Ceci permet alors de montrer un théorème central limite dans l'espace physique. Nous ne le détaillons pas ici, mais il affirme essentiellement que pour une "bonne" donnée initiale* f_0*, l'unique solution* f *au problème (1) vérifie :*

$$e^{3\mu_\alpha t} f(e^{\mu_\alpha t}v,t) \to_{t\to\infty} \Psi_{\alpha,K}(v) \quad \text{faiblement au sens des mesures de probabilité} \tag{42}$$

10 Approximation de la solution au voisinage de l'origine

Dans la suite, on dira que des fonctions ayant une telle limite (39) à l'origine sont "bien définies" :

Définition 3 *On dit que* $\phi \in \mathcal{K}^\alpha$ *est bien définie à l'origine pour une certaine constante* $K \leq 0$ *si :*

$$\lim_{|\xi|\to 0} \frac{\phi(\xi)-1}{|\xi|^\alpha} = K$$

Ainsi, d'après le théorème précédent, on remarque que si une solution est bien définie au temps initial alors, il est possible d'en obtenir une estimation au voisinage de 0 en temps long. On écrit pour tout $\xi \in \mathbb{R}^3, t \geq 0$:

$$\begin{aligned} e^{-\lambda_\alpha t}\frac{\phi(\xi,t)-1}{|\xi|^\alpha} &= e^{-\lambda_\alpha t}\frac{\phi(\xi,t)-\phi_{K,\alpha}(\xi,t)}{|\xi|^\alpha} + \frac{\phi_{K,\alpha}(\xi,t)-1}{|e^{\lambda_\alpha t/\alpha}\xi|^\alpha} \\ &= e^{-\lambda_\alpha t}\frac{\phi(\xi,t)-\phi_{K,\alpha}(\xi,t)}{|\xi|^\alpha} + \frac{\Phi(e^{\mu_\alpha t}\xi)-1}{|e^{\mu_\alpha t}\xi|^\alpha} \end{aligned} \tag{43}$$

On se donne $\epsilon > 0$. Pour t fixé suffisamment grand, $e^{-\lambda_\alpha t}\|\phi(t) - \phi_{\alpha,K}(t)\|_\alpha < \epsilon/2$ donc le premier terme est majoré par $\epsilon/2$. Quant au second, il converge vers K lorsque $|\xi| \to 0$. Par conséquent, pour t suffisamment grand, et ξ au voisinage de 0 :

$$|\phi(\xi, t) - (1 + K|\xi|^\alpha e^{\lambda_\alpha t})| < \epsilon \tag{44}$$

On est donc capable, connaissant le comportement de la solution au voisinage de l'origine au temps initial, d'en déduire le comportement de la solution (à l'origine) en temps long. La question qui se pose est à présent la suivante : est-il possible de déterminer le comportement de la solution au voisinage de l'origine en tout temps ? Nous apportons une réponse positive à cette question dans la partie suivante.

11 Vitesse d'une solution

Notons également que la solution auto-similaire est, à tout instant, la contraction de la solution à l'instant initial (d'un facteur $e^{\mu_\alpha t}$). Une question se pose donc : peut-on définir une vitesse de contraction ? Raisonnons avec les mains sur la solution auto-similaire $\phi_{\alpha,K}(\xi, t) = \Phi_{\alpha,K}(e^{\mu_\alpha t}\xi)$. On a :

$$\phi_{\alpha,K}(\xi, t + dt) = \Phi_{\alpha,K}(e^{\mu_\alpha (t+dt)}\xi) = \Phi_{\alpha,K}(e^{\mu_\alpha t}(e^{\mu_\alpha dt}\xi)) = \phi_{\alpha,K}(e^{\mu_\alpha dt}\xi, t) \tag{45}$$

Autrement dit, entre les instants t et $t + dt$, le point $e^{\mu_\alpha t}\xi$ s'est "déplacé" en ξ donc il a parcouru une longueur infinitésimal $(1 - e^{\mu_\alpha dt})\xi$ en un temps dt : sa vitesse de déplacement est donc $-\mu_\alpha \xi$. Ainsi, comme on pouvait s'y attendre, la vitesse de contraction de la solution auto-similaire est radiale (dirigée vers l'origine), et égale à $-\mu_\alpha \xi$ (elle est donc nulle en 0, ce qui est cohérent).

Remarque : *Un tel "calcul" coïncide, dans le cas d'une équation de transport de la forme $\partial_t \psi(t, x) - v(x) \cdot \nabla_x \psi(t, x)$, avec la vitesse $v(x)$ de la solution. En effet, si on note f^0 la condition initiale, alors on sait que $\psi(t, x) = f^0(\phi^t(x))$, où ϕ désigne le flot associé au champ de vecteur autonome v. Par conséquent, le même calcul "à la main" conduit à une vitesse de "déplacement" d'un point égale à v.*

Maintenant, est-il possible de définir "une vitesse de contraction" pour toute solution de l'équation de Boltzmann homogène ? Peut-on au moins le faire pour des solutions bien définies à l'origine ?

Sixième partie

Développement au voisinage de l'origine

Nous démontrons la proposition suivante :

Proposition 4 *On suppose que $\mathcal{B}$ vérifie la condition d'intégrabilité suivante : il existe $\alpha_0 \in]0,2[$ tel que $(1-s^2)^{\alpha_0/4}\mathcal{B}(s) \in L^1(]-1,1[)$. Soit $\alpha \in [\alpha_0, 2[$. Si $\phi_0 \in \mathcal{K}^\alpha$ est bien définie au voisinage de l'origine, alors la solution correspondante $\phi \in \mathcal{K}^\alpha$ est bien définie au voisinage de l'origine pour tout temps, et vérifie :*

$$\lim_{|\xi|\to 0} \frac{\phi(\xi,t)-1}{|\xi|^\alpha} = Ke^{\lambda_\alpha t}$$

Démonstration : Il s'agit d'établir deux choses : d'une part que la limite existe, et d'autre part qu'elle est égale à $Ke^{\gamma_\alpha t}$. Dans un premier temps, on se place dans le cas où $\mathcal{B} \in L^1(]-1,1[)$.

Existence de la limite : Montrer que la limite existe revient à montrer qu'en tout temps $t \geq 0$, la fonction $h(t) : \xi \mapsto \dfrac{\phi(\xi,t)-1}{|\xi|^\alpha}$ est continue bornée de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{C}$. On sait que $\phi \in \mathcal{K}^\alpha$ est solution de donnée initiale $\phi_0 \in \mathcal{K}^\alpha$ si et seulement si :

$$\phi(\xi,t) = \phi_0(\xi)e^{-\gamma_2 t} + \int_0^t e^{-\gamma_2(t-\tau)}\mathcal{G}(\phi(\tau))(\xi)d\tau \tag{46}$$

Pour $\xi \neq 0$, cette égalité est équivalente à :

$$h(\xi,t) = h_0(\xi)e^{-\gamma_2 t} + \int_0^t e^{-\gamma_2(t-\tau)}F(h)(\xi,\tau)d\tau \tag{47}$$

où :

$$F(h) : (\xi,t) \mapsto \int_{\mathbb{S}} \mathcal{B}\left(\frac{\xi\cdot\sigma}{|\xi|}\right)\left(\frac{h(\xi^+,\tau)|\xi^+|^\alpha + h(\xi^-,\tau)|\xi^-|^\alpha}{|\xi|^\alpha} + \frac{h(\xi^+,\tau)h(\xi^-,\tau)|\xi^+|^\alpha|\xi^-|^\alpha}{|\xi|^\alpha}\right)d\sigma \tag{48}$$

On considère alors pour $T > 0$ l'espace $X_T = \mathcal{C}([0,T],\Omega(M))$, où pour $M > 0$, $\Omega(M)$ est définie par :

$$\Omega(M) = \left\{f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}), \|f\ |\cdot|^\alpha\|_{X_T} \leq M, f|\cdot|^\alpha + 1 \text{ est définie positive}\right\} \tag{49}$$

X_T est muni de la norme $\|f\|_{X_T} = \sup_{[0,T]} \|f(t)\|_\infty$ qui en fait un espace complet. On pose $\mathcal{H} : X_T \to X_T$ définie par :

$$\mathcal{H}(h) = (\xi, t) \mapsto h_0(\xi)e^{-\gamma_2 t} + \int_0^t e^{-\gamma_2(t-\tau)} F(h)(\xi, t) d\tau \tag{50}$$

i) Il faut choisir $M > 0$, de telle sorte que $\mathcal{H}$ soit à valeur dans X_T. Si $h \in X_T$, alors pour tout $\tau \in [0,T]$, il est clair que $\mathcal{H}(h)(\tau)$ est continue bornée sur $\mathbb{R}^3 - 0$. Établissons la continuité en 0. Soit $\epsilon > 0$ (et $\epsilon < 1$). Par continuité de $h(\tau)$ à l'origine, il existe un $\eta > 0$ tel que si $|\xi| < \eta$, alors $|h(\xi,\tau) - h(0,\tau)| < \epsilon$. Soit ξ tel que $|\xi| < \min(\xi, \eta)$. Alors :

$$\begin{aligned}
|F(h)(\xi,\tau) - &\gamma_\alpha h(0,\tau)| \\
&\leq \int_{\mathbb{S}} \mathcal{B}\left(\frac{\xi\cdot\sigma}{|\xi|}\right) \frac{|h(\xi^+,\tau) - h(0,\tau)||\xi^+|^\alpha + |h(\xi^-,\tau) - h(0,\tau)||\xi^-|^\alpha}{|\xi|^\alpha} d\sigma \\
&\qquad + \|h(\tau)\|_\infty^2 \int_{\mathbb{S}} \mathcal{B}\left(\frac{\xi\cdot\sigma}{|\xi|}\right) \frac{|\xi^+|^\alpha|\xi^-|^\alpha}{|\xi|^\alpha} d\sigma \\
&\leq \epsilon\gamma_\alpha + |\xi|^\alpha \gamma_2 \|h\|_{X_T}^2 \\
&\leq \epsilon(\gamma_\alpha + \gamma_2\|h\|_{X_T}^2)
\end{aligned} \tag{51}$$

Ainsi, $F(h)(\cdot,\tau)$ est continue en 0 (et $F(h)(0,\tau) = \gamma_\alpha h(0,\tau)$), et évidemment continue en dehors de l'origine. C'est également une fonction bornée. Le théorème de continuité sous le signe intégrale nous permet alors de conclure que $\mathcal{H}(h) \in \mathcal{C}([0,T], \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}))$. En outre, par construction, $\mathcal{H}(h)(t)|\cdot|^\alpha + 1$ est définie positive pour tout t.

Reste à établir l'inégalité sur la norme. On vérifie facilement que pour tout $(\xi, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,T]$:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{H}(h)(\xi,t)|\xi|^\alpha| &\leq \|h_0|\cdot|^\alpha\|_\infty e^{-\gamma_2 t} + (2M + M^2)(1 - e^{-\gamma_2 t}) \\
&= \left(\|h_0|\cdot|^\alpha\|_\infty - (2M + M^2)\right) e^{-\gamma_2 t} + 2M + M^2
\end{aligned} \tag{52}$$

Prenons par exemple $M = 2\|h_0|\cdot|^\alpha\|_\infty = 2c$. Par conséquent, en passant au sup, il vient :

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{H}(h)|\cdot|^\alpha\|_{X_T} &\leq \left(\|h_0|\cdot|^\alpha\|_\infty - (2M + M^2)\right) e^{-\gamma_2 T} + 2M + M^2 \\
&= c + 4(1 - e^{-\gamma_2 T})(c + c^2)
\end{aligned} \tag{53}$$

On veut que le membre de droite de cette égalité soit inférieur égal à $M = 2c$. Mais, ceci est clairement possible pour T suffisamment petit (T inférieur à un certain T_0). On a alors :

$$\| \mathcal{H}(h) | \cdot |^{\alpha} \|_{X_T} \leq M \tag{54}$$

ce qui nous permet de conclure que $\mathcal{H}(h) \in X_T$, donc $\mathcal{H}$ est bien défini.

ii) De plus, $\mathcal{H}$ vérifie une propriété de contraction. En effet, soit $h, g \in X_T$. Pour $(\xi, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T]$, on a :

$$\begin{aligned} &|(\mathcal{H}(h) - \mathcal{H}(g))(\xi, t)| \leq \int_0^t e^{-\gamma_2(t-\tau)} \\ &\int_{\mathbb{S}} \mathcal{B}\left(\frac{\xi \cdot \sigma}{|\xi|}\right) \frac{|h(\xi^+, \tau) - g(\xi^+, \tau)||\xi^+|^{\alpha} + |h(\xi^-, \tau) - g(\xi^-, \tau)||\xi^-|^{\alpha}}{|\xi|^{\alpha}} \\ &\quad + \mathcal{B}\left(\frac{\xi \cdot \sigma}{|\xi|}\right) \left| h(\xi^+, \tau) h(\xi^-, \tau) - g(\xi^+, \tau) g(\xi^-, \tau) \right| \frac{|\xi^+|^{\alpha} |\xi^-|^{\alpha}}{|\xi|^{\alpha}} d\sigma d\tau \end{aligned} \tag{55}$$

Dans l'intégrale sur la sphère, le premier terme se majore par $\|h - g\|_{X_T} \gamma_\alpha$. Quant au second, on écrit :

$$\begin{aligned} \left| h(\xi^+, \tau) h(\xi^-, \tau) - g(\xi^+, \tau) g(\xi^-, \tau) \right| \frac{|\xi^+|^{\alpha} |\xi^-|^{\alpha}}{|\xi|^{\alpha}} &\leq |h(\xi^+, \tau) - g(\xi^+, \tau)||h(\xi^-, \tau)||\xi^-|^{\alpha} \frac{|\xi^+|^{\alpha}}{|\xi|^{\alpha}} \\ &\quad + |h(\xi^-, \tau) - g(\xi^-, \tau)||g(\xi^+, \tau)||\xi^+|^{\alpha} \frac{|\xi^-|^{\alpha}}{|\xi|^{\alpha}} \\ &\leq 2M \|h - g\|_{X_T} \end{aligned} \tag{56}$$

D'où :

$$\begin{aligned} |(\mathcal{H}(h) - \mathcal{H}(g))(\xi, t)| &\leq \|h - g\|_{X_T} (\gamma_\alpha + 2M\gamma_2) \int_0^t e^{-\gamma_2(t-\tau)} d\tau \\ &= \|h - g\|_{X_T} (\gamma_\alpha + 2M\gamma_2)(1 - e^{-\gamma_2 T}) \\ &\leq \|h - g\|_{X_T} T \gamma_2 (\gamma_\alpha + 2M\gamma_2) \end{aligned} \tag{57}$$

Ainsi, pour $T = T_1 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\gamma_2(\gamma_\alpha + 2M\gamma_2)}$, $\mathcal{H}$ est contractante. On fixe dans la suite $T < \min(T_0, T_1)$.

iii) On en déduit que $\mathcal{H}$ admet un unique point fixe $h \in X_T$. De plus, la fonction $\omega = |\cdot|^\alpha h + 1 \in \mathcal{K}^\alpha$ et vérifie (46) donc ω est égale à l'unique solution ϕ de (5) de donnée initiale $\phi_0 \in \mathcal{K}^\alpha$ sur $[0, T]$. Par conséquent, $\phi = \omega$ est bien définie au voisinage de l'origine sur $[0, T]$. On note :

$$T^* = \sup\{T > 0, \phi(T) \text{ est bien définie au voisinage de l'origine}\} \tag{58}$$

Mais alors pour $\xi \neq 0$:

$$\frac{\phi(\xi, T^*) - 1}{|\xi|^\alpha} = \frac{\phi_0(\xi) - 1}{|\xi|^\alpha} e^{-\gamma_2 T^*} + \int_0^{T^*} e^{-\gamma_2(T^* - \tau)} \frac{\mathcal{G}(\phi(\tau))(\xi) - \gamma_2}{|\xi|^\alpha} d\tau \tag{59}$$

Et on passe à la limite sur $|\xi| \to 0$ par un calcul identique à celui mené en i). Par conséquent, $\phi(T^*)$ est bien définie au voisinage de l'origine. Il suffit alors d'effectuer le même raisonnement avec pour donnée initiale $\phi(T^*)$. On en déduit, que ϕ est bien définie au voisinage de l'origine sur un intervalle $[0, T + \delta T]$, avec $\delta T > 0$, de sorte que $T^* = +\infty$. Ainsi, si ϕ_0 est bien définie au voisinage de l'origine, alors ϕ l'est pour tout temps.

Calcul de la limite : En outre, si on note $p(t) = \lim_{|\xi| \to 0} \dfrac{\phi(\xi, t) - 1}{|\xi|^\alpha}$, alors le calcul précédent montre que pour tout $t \geq 0$:

$$p(t) = K e^{-\gamma_2 t} + \int_0^t \gamma_\alpha e^{-\gamma_2(t-\tau)} p(\tau), \quad p(0) = K \tag{60}$$

Ceci se ramène aisément à une équation différentielle ordinaire dont on vérifie que $p : t \mapsto K e^{\lambda_\alpha t}$ est l'unique solution.

Cas général : Dans le cas où $(1 - s^2)^{\alpha_0/4} \mathcal{B}(s) \in L^1(]-1, 1[)$ pour un certain $\alpha_0 \in [0, 2]$, il suffit d'appliquer la construction en approximant $\mathcal{B}$ par les noyaux $\mathcal{B}_n = \min\{n, \mathcal{B}\}$ comme dans la quatrième partie. La convergence uniforme des $(\phi_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ vers la solution ϕ sur tous les compacts $[0, T] \times K$ permet de passer à la limite lorsque $k \to \infty$ dans (4), ce qui donne le résultat attendu.

En corollaire, on obtient immédiatement le résultat suivant sur les fonctions $\phi_{\alpha,K}$:

Corollaire 1 *Soit $t > 0$, alors :*

$$\lim_{s \to \infty} e^{-\lambda_\alpha s} \|\phi_{\alpha,K}(t + s) - \phi_{\alpha, K e^{\lambda_\alpha t}}(s)\|_\alpha = 0 \tag{61}$$

Références

[1] F. Golse. *Distributions, analyse de Fourier, équations aux dérivées partielles.* Éditions de l'Ecole Polytechnique, 2012.

[2] C. Karch M. Cannone. Infinite energy solutions to the homogeneous boltzmann equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2010.

[3] C. Karch M. Cannone. On self-similar solutions to the homoheneous boltzmann equation. *American Institute of Mathematical Sciences*, 2013.

[4] S. Rongfeng. Probability 1, lecture 7. *National University of Singapore*, 2014.

[5] C. Villani. *A review of mathematical topics in collisional kinetic theory.* Elsevier Science, 2006.